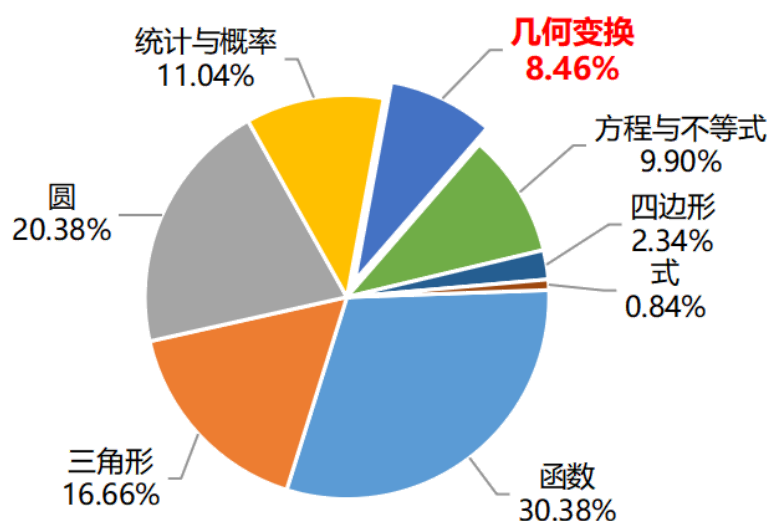


第1讲 旋转的概念及性质

旋转属于人教版教材第二十三章的内容，会与三角形、四边形的性质进行综合。本模块为《旋转进阶》，重点包括旋转性质的综合应用，此外需要学生在理解性质的基础上，学会旋转模型，总结一定的解题思路。

本模块难度适中，适用于基础部分的夯实与综合应用，本模块分为旋转的概念及性质、旋转基本模型2讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

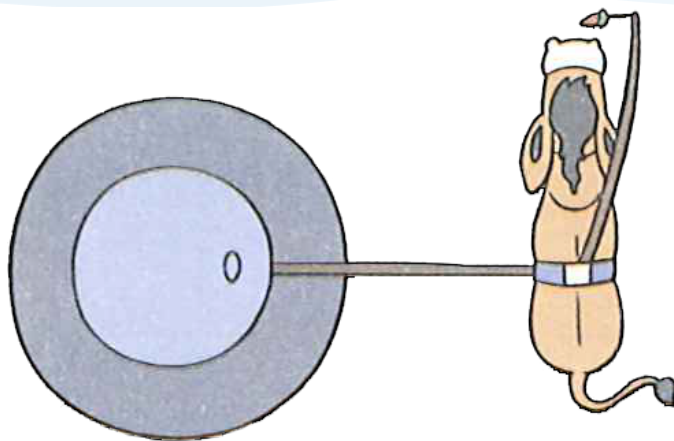
知己知彼



知识点	难度	考频
旋转与中心对称	★★★	高
手拉手模型	★★★★	中
角含半角模型	★★★★	中
对角互补模型	★★★★	中

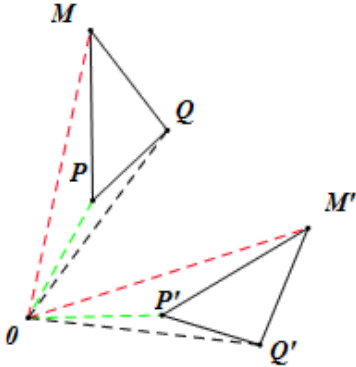
思考：

观察下图我们能分析出什么呢。

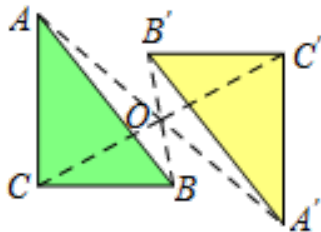


一、 旋转与中心对称

1. 旋转的定义

旋转定义	在平面内，将图形绕一个定点 O 沿某个方向（逆时针或顺时针）转动一定的角度，这样的图形变换叫做旋转．这个定点 O 叫做_____，转动的角称为_____． 图形上的点 P 经过旋转变为点 P'，那么这两个点叫做旋转的_____．
	
	如图，将 $\triangle PMQ$ 绕点 O 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle P'M'Q'$，点_____是旋转中心， P 与_____是对应点，M 与_____是对应点，Q 与_____是对应点， _____是旋转角．
旋转三要素	① _____；② _____；③ _____．
旋转性质	①对应点到旋转中心的距离_____． $OP = \underline{\hspace{2cm}}$，$OQ = \underline{\hspace{2cm}}$，$OM = \underline{\hspace{2cm}}$． ②对应点与旋转中心所连线段的夹角都_____旋转角． _____． ③旋转前后图形_____

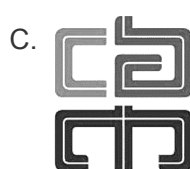
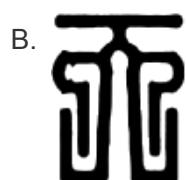
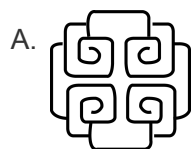
2. 中心对称与中心对称图形

中心对称定义	把一个图形绕着某一点旋转____，如果它能够与另一个图形____，那么就说这两个图形关于这个点中心对称或中心对称，这个点叫做____。这两个图形在旋转后能重合的对应点叫做关于对称中心的_____。 
中心对称性质	中心对称的两个图形，对称点所连线段都____对称中心，而且被对称中心所_____。

举个“栗”子

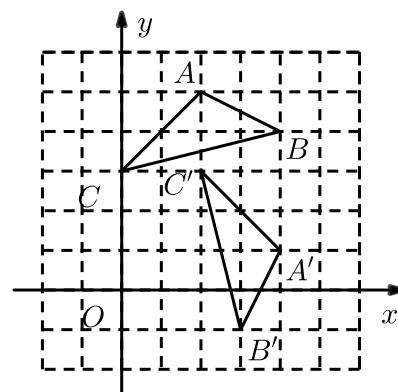
栗子1

1. 《国家宝藏》节目立足于中华文化宝库资源，通过对文物的梳理与总结，演绎文物背后的故事与历史，让更多的观众走进博物馆，让一个个馆藏文物鲜活起来，下面四幅图是我国一些博物馆的标志，其中是轴对称图形但不是中心对称图形的是（ ）。



栗子2

2. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 P 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C'$ ，则点 P 的坐标是（ ）。



A. (1,1)

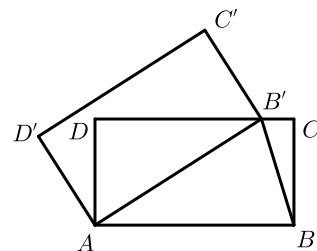
B. (1,2)

C. (1,3)

D. (1,4)

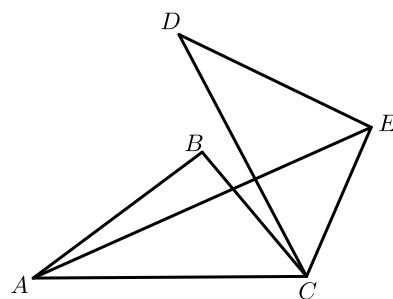
栗子3

3. 如图，矩形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 得到矩形 $AB'C'D'$ ，此时点 B' 恰好在 DC 边上、若 $\angle B'BC = 15^\circ$ ，则 α 的大小为 ()。



- A. 15° B. 25° C. 30° D. 45°

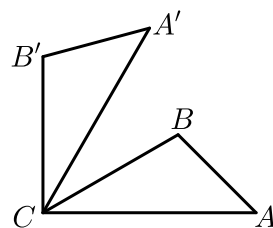
4. 如图，以点 C 为旋转中心，把 $\triangle ABC$ 顺时针旋转得 $\triangle DEC$ 。记旋转角为 α ，连接 AE ， $\angle AED$ 为 β ，则 $\angle BAE$ 的度数为 ()。



- A. $\alpha - \beta$ B. $\frac{\alpha}{2} + \beta$ C. $\frac{\beta}{2}$ D. $\alpha - \frac{\beta}{2}$

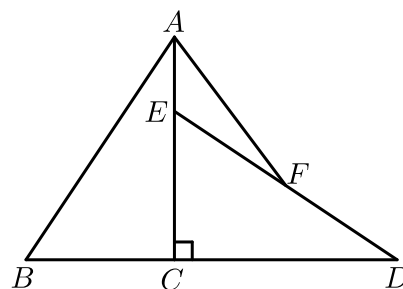
栗子4

5. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转 60° 后得到 $\triangle A'B'C$ ，若 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B' = 105^\circ$ ，且 $AB = \sqrt{2}$ ，则 A' ， B 两点之间的距离为 ()。



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $1 + \sqrt{3}$

6. 如图，在中 $\text{Rt}\triangle ABC$ ， $AC = 6$ ， $BC = 4$ ，将绕直角顶点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle DEC$ ，若点 F 是 DE 的中点，连接 AF ，则 AF 的长为 ()。



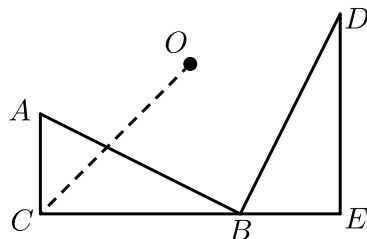
A. 3

B. 4

C. 5

D. $4\sqrt{2}$

7. 如图，将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕 O 点旋转 90° ，得 $\text{Rt}\triangle BDE$ ，其中 $\angle ACB = \angle BED = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $AB = 10$ ，则点 C 与旋转中心点 O 的距离 OC 的长是（ ）。

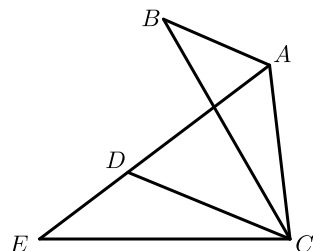
A. $7\sqrt{2}$ B. $6\sqrt{2}$

C. 14

D. 12

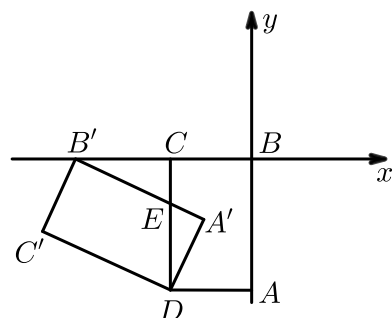
栗子5

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 120^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转得到 $\triangle DEC$ ，点 A ， B 的对应点分别为 D ， E ，连接 AD 。当点 A ， D ， E 在同一条直线上时，下列结论一定正确的是（ ）。

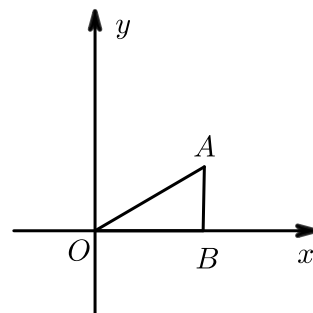
A. $\angle ABC = \angle ADC$ B. $CB = CD$ C. $DE + DC = BC$ D. $AB \parallel CD$

栗子6

9. 如图，在平面直角坐标系中，长方形 $ABCD$ 的顶点 B 在坐标原点，顶点 A 、 C 分别在 y 轴、 x 轴的负半轴上，其中 $A(0, -4)$ ， $C(-2, 0)$ ，将矩形 $ABCD$ 绕点 D 逆时针旋转得到矩形 $A'B'C'D$ ，点 B' 恰好落在 x 轴上，线段 $B'A'$ 与 CD 交于点 E ，那么点 E 的坐标为（ ）。

A. $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ B. $\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$ C. $(-2, -2)$ D. $\left(-2, -\frac{5}{4}\right)$

10. 如图， $\triangle ABO$ 中， $AB \perp OB$ ， $OB = \sqrt{3}$ ， $AB = 1$ ，把 $\triangle ABO$ 绕点 O 旋转 150° 后得到 $\triangle A_1B_1O$ ，则点 A_1 的坐标为（ ）。



A. $(-1, -\sqrt{3})$

B. $(-1, -\sqrt{3})$ 或 $(-2, 0)$

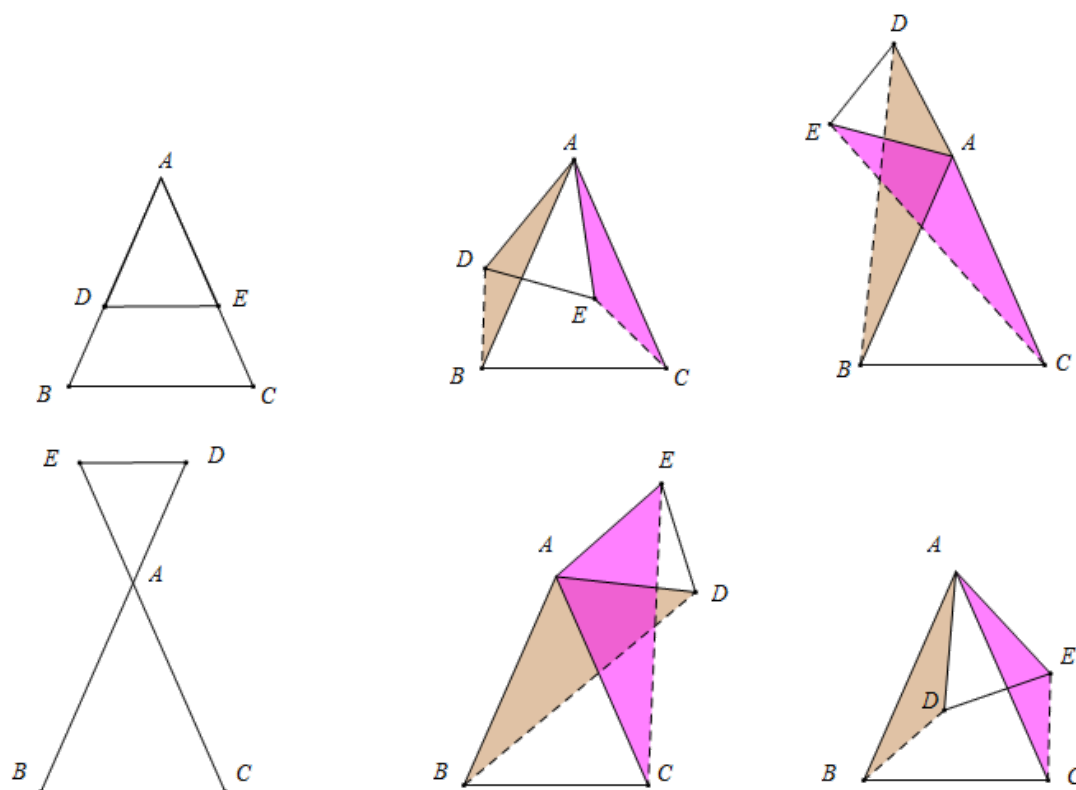
C. $(-\sqrt{3}, -1)$ 或 $(0, -2)$

D. $(-\sqrt{3}, -1)$

二、旋转之手拉手模型

1. “手拉手”模型正用

已知等腰 $\triangle ABC$, $AB = AC$, 过 AB 边上的一点 D 作 BC 边的平行线 DE 交 AC 于 E , 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转一周 .

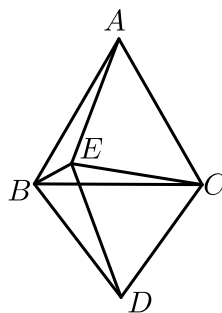


由 A 点引发了两个共顶点的等腰三角形，大手 _____，小手 _____，
大手拉小手，通过“_____”可以证明_____。

！ 结论：

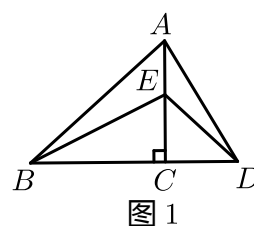
无论旋转多少度，_____， BD 、 CE 所形成的夹角有一角等于_____。

11. 如图，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，且 $\angle EBD = 62^\circ$ ，则 $\angle AEB$ 的度数是 _____ .



栗子8

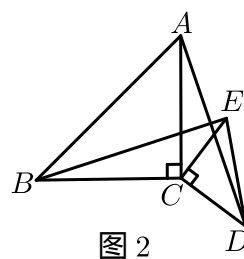
12. 如图1，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， E 是边 AC 上任意一点（点 E 与点 A 、 C 不重合），以 CE 为一直角边作 $\text{Rt}\triangle ECD$ ， $\angle ECD = 90^\circ$ ，连接 BE ， AD 。



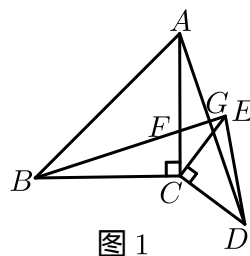
(1) 若 $CA = CB$ ， $CE = CD$ ，

① 猜想线段 BE ， AD 之间的数量关系及所在直线的位置关系，直接写出结论；

② 现将图1中的 $\text{Rt}\triangle ECD$ 绕着点 C 顺时针旋转锐角 α ，得到图2，请判断①中的结论是否仍然成立，若成立，请证明；若不成立，请说明理由。



(2) 若 $CA = CB = 8$ ， $CE = CD = 3$ ， $\text{Rt}\triangle ECD$ 绕着点 C 顺时针旋转锐角 α ，如图3，连接 BD ， AE ，计算 $BD^2 + AE^2$ 的值。

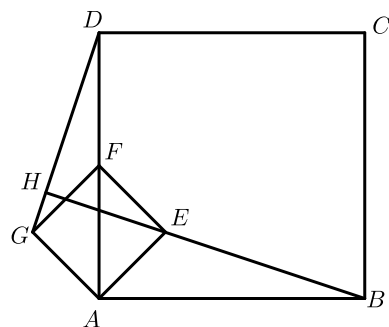


栗子9

变式：正方形、矩形手拉手

13.

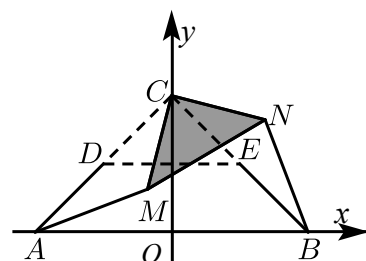
如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，有正方形 $AEFG$ 绕点 A 逆时针旋转，当 $\angle BAE = 45^\circ$ 时，连接 DG ， BE ，并延长 BE 交 DG 于点 H 。若 $AB = 4$ ， $AE = \sqrt{2}$ ，则线段 BH 的长是 _____。



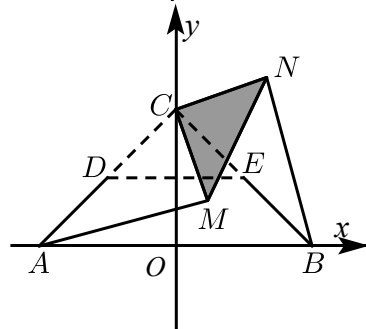
独步天下1

14. 在平面直角坐标系中，点 $A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， $C(0, 2)$ ，点 D 、 E 分别是 AC ， BC 的中点，将 $\triangle CDE$ 绕点 C 逆时针旋转得 $\triangle CMN$ ，点 M ， N 分别是点 D ， E 旋转后的对应点，记旋转角 α 。

(1) 如图，求证 $AM = BN$ 。



(2) 如图，当 $\alpha = 75^\circ$ 时，求点 N 的坐标。

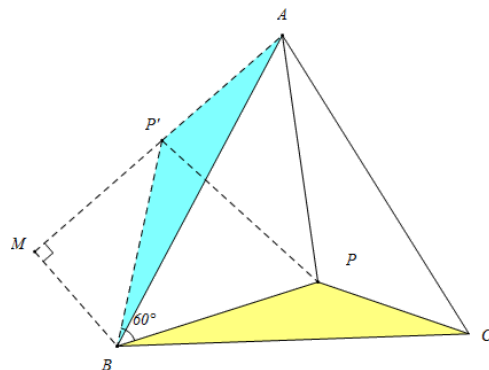


(3) 当 $AM \parallel CN$ ，求 BN 的长（直接写出结果即可）。

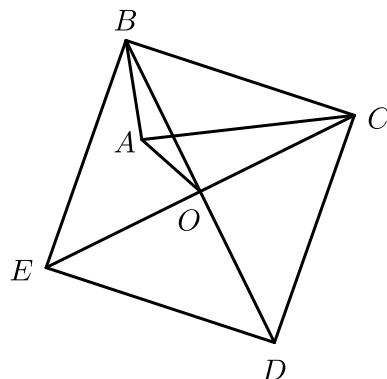
2. “手拉手”模型逆用

思考：

如图，已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 P 在 $\triangle ABC$ 内部， $PA = 2$ ， $PB = \sqrt{3}$ ， $PC = 1$ ，求 $\angle BPC$ 的度数及 AB 的长。



15. 如图，以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 为一边作正方形 $BCDE$ ，设正方形的中心为 O ，连接 AO ，如果 $AB = 3$ ， $AO = 2\sqrt{2}$ ，那么 AC 的长等于 () .

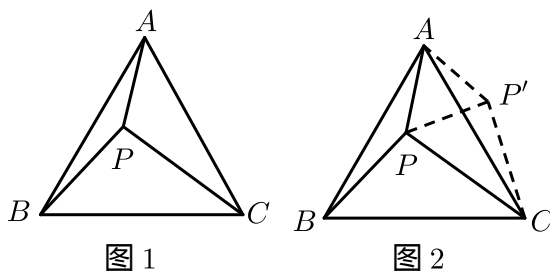


- A. 12 B. 7 C. $\sqrt{17}$ D. $6\sqrt{2}$

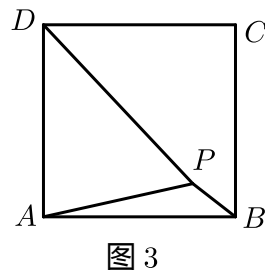
16. 阅读下面材料：

小伟遇到这样一个问题：如图 1，在正三角形 ABC 内有一点 P ，且 $PA = 3$ ， $PB = 4$ ， $PC = 5$ ，求 $\angle APB$ 的度数 .

小伟是这样思考的：如图 2，利用旋转和全等的知识构造 $\triangle AP'C$ ，连接 PP' ，得到两个特殊的三角形，从而将问题解决 .



- (1) 图 1 中 $\angle APB$ 的度数等于 _____ .
- (2) 如图 3，在正方形 $ABCD$ 内有一点 P ，且 $PA = 2\sqrt{2}$ ， $PB = 1$ ， $PD = \sqrt{17}$ ，则 $\angle APB$ 的度数等于 _____，正方形的边长为 _____ .



- (3) 如图 4，在正六边形 $ABCDEF$ 内有一点 P ，且 $PA = 2$ ， $PB = 1$ ， $PF = \sqrt{13}$ ，则 $\angle APB$ 的度数等于 _____，正六边形的边长为 _____（并写出解答过程） .

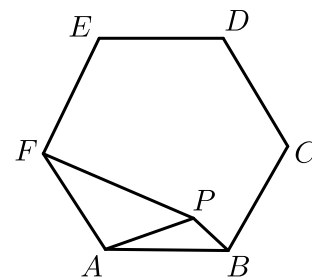
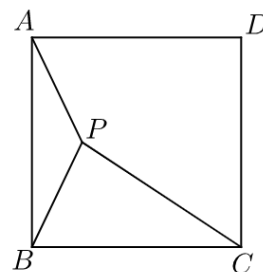


图 4

独步天下2

17. 一节数学课上，老师提出了这样一个问题：如图①，点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点， $PA = 1$ ， $PB = 2$ ， $PC = 3$ ，你能求出 $\angle APB$ 的度数吗？小宇通过观察，分析，思考，形成了如下思路：
- 思路一：将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle BP'C$ ，连接 PP' ，可以求出 $\angle APB$ 的度数。
- 思路二：将 $\triangle APB$ 绕点 B 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle CP'B$ ，连接 PP' ，可以求出 $\angle APB$ 的度数。



- (1) 请你参考小宇的思路，任选一种，写出完整的解答过程。
- (2) 类比讨论：如图②，点 P 是正方形 $ABCD$ 外一点， $PA = 3$ ， $PB = 1$ ， $PC = \sqrt{11}$ ，则 $\angle APB$ 的度数为 _____。（直接写出答案即可）

